LOS METODOS PROYECTIVOS EN LA MECANICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS

E. Alarcón

Cátedra de Estructuras
E.T.S. de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen.- El Método de las Ecuaciones Integrales es una potente alternativa a los Métodos de Dominio tales como el Método de los Elementos Finitos. La idea esencial es la combinación de la clásica relación de la reciprocidad con la filosofía de la discretización del F.E.M.
La aplicación a algunos problemas reales ha demostrado que en ciertos casos el B.I.E.M. es preferible al F.E.M. y ello es especialmente así cuando los problemas a tratar son tridimensionales y con geometría complicada.
En esta ocasión se analizan comparativamente algunos aspectos matemáticos del procedimiento.

INTRODUCCION

De entre los problemas clásicos incluidos en la física matemática, la mecánica de los medios contínuos ha sido tradicionalmente una parte importante, tanto por su interés abstracto como por su capacidad de aplicación inmediata.

Desde los años 50 se ha producido una importante convergencia entre las investigaciones puras del análisis funcional y los métodos numéricos especialmente aptos para su aplicación en ordenador. Ejemplo de ellos es el desarrollo experimentado por el método de los elementos finitos (F.E.M) que tras una etapa de experimentación heurística, con aislados brotes de depuración, (BABUSKA y AZIZ, 1972) está pasando en estos último años por una etapa de formalización y asentamiento en sólidas bases matemáticas (CIARLET y RAVIART, 1977).

Como es bien sabido el F.E.M. no es mas que el método de GALERKIN con un espacio aproximadamente generado por funciones splines de pequeño soporte. Al tratarse de una formulación débil con un producto interno definido sobre todo el dominio en estudio, es preciso discretizar éste por completo, lo que conduce a un importante número de ecuaciones a resolver; presenta además problemas cuando el medio en estudio es infinito (ya que hay que recurrir a acotarlo) y, finalmente, ofrece una representación defectuosa de ciertas variables de campo.

Pese a ello su claridad conceptual, así como su fácil adaptación a problemas no lineales han hecho que se convierta en un instrumento de uso cotidiano. En este sentido hay que reconocer que el F.E.M. ofrece como atractivo mas estimulante una filosofia de discretización congruente y unitaria, cosa que no se encontraba en métodos anteriores.

En su contra cabría decir que el esplendido florecimiento de investigaciones contínuas sobre sus posibilidades ha impedido que otros procedimientos, con características en cierto modo complementarias, hayan sido convenientemente explorados.

Este es el caso del llamado método de las ecuaciones integrales singulares (B.I.E.M.) que, con hundir sus raices en la teoría del potencial, al ser observado con la perspectiva de los últimos años aparece como uno de los mas interesantes caminos a recorrer.

Con resultados prácticos inmediatos y lleno de interrogantes tanto teóricos como númericos, el B.I.E.M. ofrece un nuevo lugar de encuentro para matemáticos, físicos e ingenieros o, según la terminología de Lord Kelvin, para todos los interesados en la "Filosofía Natural"

EL METODO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES SINGULARES (B.I.E.M.)

Tres características suelen ser citadas en relación con la utilización del B.I.E.M.: Una ecuación del campo de tipo elíptico, una relación de reciprocidad y una solución fundamental de las ecuaciones de campo.

Con objeto de situar el proceso en el contexto general de los métodos variacionales conviene ir aplicando esos tres conceptos.

Sea A un operador lineal simétrico definido positivo que al ser aplicado a dos funciones u y ψ_j produce respectivamente los resultados f y f_j^*.

$$Au = f \qquad A\psi_j = f_j^* \tag{1}$$

Una expresión integral de (1) se obtiene mediante los productos internos

$$(Au, \psi_j)_D = (f, \psi_j)_D \qquad (A\psi_j, u)_D = (f_j^*, u)_D \tag{2}$$

Como es sabido los primeros miembros pueden desarrollarse como:

$$(Au, \psi_j)_D = a(u, \psi_j)_D + b(u, \psi_j)_{\partial D} \qquad (A\psi_j, u)_D = a(\psi_j, u)_D + b(\psi_j, u)_{\partial D} \tag{3}$$

Usando (3) la sustracción de las dos expresiones (2) conduce a

$$b(u, \psi_j)_{\partial D} - b(\psi_j, u)_{\partial D} = (f, \psi_j)_D - (f_j^*, u) \tag{4}$$

puesto que a (. , .) es una forma bilineal simétrica.

La primera (3) puede identificarse con una formulación débil del problema inicial si a las ψ_j se les exigen las condiciones adecuadas. Físicamente, en elasticidad, representa el teorema de los trabajos virtuales. Desde un punto de vista numérico es la base del método de los elementos finitos cuando D se sustituye por un dominio aproximado D_h y se supone u formada como superposición de funciones spline en número finito.

Por su lado (4) es una relación de reciprocidad bien conocidad en elasticidad con el nombre de MAXWELL-BETTI, o en teoría del potencial con el de GREEN. A nosotros nos interesa especialmente como base de una serie de métodos numéricos, denominados <u>de contorno</u>, debido a que las integrales que aparecen el primer miembros se realizan en ∂D.

Si se elige $f_j^* = 0$ se obtienen los llamados métodos de <u>TREFFTZ</u> (KANTOROVCH Y KRILOV 1964; COLLATZ 1966; REKTORYS ,1977).

Por otro lado si se toma

$$f_j^* = \delta(x_j) \tag{5}$$

es decir, la solución fundamental de A, se obtiene una relación

$$u(x_j) + b(u, \psi_j)_{\partial D} = b(\psi_j, u)_{\partial D} + (f, \psi_j)_D \tag{6}$$

$$\forall x_j \in D$$

que en elasticidad corresponde a la llamada identidad de SOMIGLIANA (LOVE 1944) y en teoría del potencial permite expresar el valor de aquél en un punto como la suma de un potencial de simple capa, otro de doble capa y una distribución espacial (COURANT Y HILBERT,1953; KELLOG,1953 FOLLAND,1976).

El método de los elementos de contorno implica un paso al límite

$$x_j \to y_j \qquad x_j \in D\,;\; y_j \in \partial D \tag{7}$$

y una interpretación de las integrales singulares en el sentido de su valor principal (6) se transforma así en

$$c\, u(y_j) + b(u, \psi_j)_{\partial D} = b(\psi_j, u)_{\partial D} + (f, \psi_j)_D$$

$$\forall y_j \in \partial D.$$

donde c es un conjunto de constantes que dependen exclusivamente de la lisura de ∂D en punto y_j. En particular si y_j no es un punto anguloso $c = \frac{1}{2} I$ donde I es la matriz unidad de tamaño correspondiente al problema en estudio.

Observese que las incógnitas del problema están relacionadas exclusivamente con valores en el contorno D ya que tanto f como ψ_j (relacionadas mediante un producto interno en D) son conocidas y por ello el segundo sumando del segundo miembro de (8) es conocido.

El B.I.E.M. se obtiene cuando a (8) se le aplica la filosofía de discretización del método de los elementos finitos. Para ello conviene explicitar la forma de b. Si por E designamos el operador de las condiciones esenciales de contorno y por N el de las condiciones naturales (8) puede escribirse como

$$c\, u(y_j) + (N u, E\psi_j)_{\partial D} - (N\psi_j, E u)_{\partial D} = (f, \psi_j)_D \tag{9}$$

En el B.I.E.M. se aproxima

$$N u \simeq a_i\, N u_i \qquad E u \simeq b_i\, E u_i \qquad i = 1,2, \dots N. \tag{10}$$

donde el índice repetido indica sumación y cada ψ_i es la variable de campo correspondiente a la aplicación $\delta(x_i)$ en una serie de puntos x_i o <u>nodos</u> del contorno entre los que se extienden elementos que aproximan la superficie real de modo que

$$x = c_i \; x_i \qquad (11)$$

a_i; b_i; c_i son llamadas "funciones de forma" y en el caso de $a_i = b_j = c_i$ se llega al concepto de elemento isoparamétrico . En algunos casos, sin embargo, es corriente tomar $a_i = c_i$ que corresponde a la idea isoparamétrica del F.E.M. y para b_i se escogen funciones distintas. Ello puede venir recomendado por la necesidad de simular, por ejemplo, singularidades en Eu. (PARIS et. al, 1979) .

Haciendo las citadas sustituciones se obtiene el sistema

$$c\, u\,(y_j) + (a_i\,,\, E\,\psi_j)_{\partial D}\; NU_i - (N\,\psi_j\,,\, b_i)_D\, Eu_i =$$

$$= (f,\, \psi_j)_D \qquad (12)$$

donde se observan dos características inconvenientes del método: la asimetría de la matrices

$$\hat{A}_{ij} = (a_i\,,\, E\,\psi_j)_{\partial D}$$

$$B_{ij} = (N\,\psi_j\,,\, b_i)_{\partial D} \qquad (13)$$

y su caracter de matriz llena debido a que las ψ_j están definidas en todo el contorno. Algunos autores (BABUSKA, 1978) cuestionan por ello la elección de las a_i, b_i como splines polinómicos. No obstante esta elección es del mayor interés para que se mantenga el significado físico de los coeficientes en la (10)

Incorporando el primer sumando al segundo es posible escribir

$$A\,u - B\,v = P \qquad (14)$$

donde u es un vector que recoge los valores naturales de la variable de campo, v los esenciales y P los productos escalares (f, ψ_j):

El tamaño de las matrices depende del problema en estudio. En elasticidad tridimensional por ejemplo, 3N x3N donde N es el número de nodos, u recoge los valores de los movimientos nodales, B es 6N x 6N y v recoge los valores Tu antes y después de cada nodo. (B es reducible en 3N x 3N recogiendo la continuidad del estado de tensiones en el interior del dominio D (ALARCON et al. 1978).

La imposición de las condiciones adecuadas de contorno permite finalmente llegar al sistema

$$K\,X = F \qquad (15)$$

resoluble mediente cualquier procedimiento.

Obtenidos los valores que aproximan la función a una aplicación de (6) con la hipótesis (10) permite calcular valores de interés en el interior del dominio. Además de la llamativa ventaja de reducción en una dimensión de la zona a discretizar, la última característica citada es una de las mas interesantes propiedades del B.I.E.M. toma sólo las incógnitas básicas y deja al usuario en libertad de escoger los puntos interiores que estime conflictivos.

En cuanto a eficiencia numérica cabe decir que los resultados obtenidos en el B.I.E.M. tienen, a igualdad de aproximación, una mayor precisión que los producidos por un programa F.E.M. Los tiempos de cálculo (C.P.U.) son en general superiores, salvo cuando se trata de problemas tridimensionales en los que el B.I.E.M. tiene una ligera superioridad que se ve acrecentada si se tiene en cuenta el tiempo de discretización y preparación de datos.

El mayor porcentaje de tiempo se invierte en el cálculo de los elementos de las matrices $\hat{A}$ y B debido a las pecualiaridades de la solución fundamental. Cuando se recurre a interpolaciones mediante funciones de forma cuadráticas o de orden superior el cálculo de elementos no puede realizarse en forma analítica y es preciso recurrir a una integración numérica. Con objeto de tener en cuenta la sensibilidad de esa integración a la singularidad de la integral se han desarrollado procedimientos de selección automática del número de puntos de integración (LACHAT Y WATSON, 1978; RIZZO y SHIPPY 1979) que, en esencia, hacen uso de unas conocidas cotas de error establecidas por STROUD y SECREST 1966).

En otras ocasiones se ha utilizado una aproximación logarítmica (ALARCON y DOMINGUEZ,1979) que permite utilizar formular tipo GAUSS con ponderación de aquél tipo .

REFERENCIAS

Alarcón E. Brebbia, Dominguez(1978). "The boundary element method in elasticity". Internat. Journ. Mech: Sciences.

Alarcón,E., Dominguez J,. (1980) "Dynamics Stiffnesses of embedded foundations" an Intern. Symposium on Inmovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science.

Babuska & Aziz, (1972) "The mathematical foundations of the F.E.M. with applications to partial differential equations" University of Maryland.

Babuska, (1978) Comunicación privada.

Ciarlet (1977) "The finite element method for elliptic problems" North-Holland.

Collatz (1966). "The numerical treatment of differential equations". Springer-Verleg

Courant & Hilbert (1953) "Methods of mathematical

physics". Interscience.
Folland, (1976) "Introduction to partial differencial equations".Princeton U.P.
Kantorovitch & Krilov (1964) "Aproximate methods of higher analysis". Noord-Proff.
Kellog (1953) "Foundations of potencial theory" Dover.
Lachat & Watson. (1978) "Effective numerical -- treatment of boundary integral equations". Int. J. Num. Meth. Eng. 10,991-1005
Love (1944) " A treatise on the mathematical theory of elasticity" . Dover
Rektorys (1977) "Variational methods in mathematics, science and engineering" Reidel Pub.
Rizzo & Shippy (1979) "The boundary element - method in thermoelasticity in Developments in B.E.M.-1" ed. by Banerjee & Butterfield, Ap Scien. Pub.
Stroud & Secrest (1966) "Gaussian quadrature - formulas". Prentice Hall.

APENDICE I. DEFINICIONES

Con objeto de precisar concepto y aprovechar al máximo el espacio ofrecido a esta comunicación nos centraremos en medios elásticos.

Def.1.- Un medio elástico.

$D(\rho, \lambda, \mu, \chi, \eta, \gamma)$ es un dominio geométrico D con contorno D que puede variar en el intervalo de tiempo $T = [t_0, t_1] = t \in R / t_0 \leq t \leq t_1$ mas un conjunto de constantes características del problema en estudio. Con las condiciones

$$\rho > 0 \quad \mu > 0 \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \quad \frac{\gamma}{\eta} > 0 \qquad \chi > 0$$

En particular, por ejemplo

Def. 2.- Un estado termoelasto-dinámico

del medio $D(\rho, \lambda, \mu, \gamma, \eta, \chi)$ en el intervalo $T = [t_0, t_1]$, sometido a las fuerzas por unidad de volumen X y a los focos térmicos Q es la triada $[u, \sigma, \theta]$ que cumple

$$\text{I)} \quad \sigma \in C^1(D \times T)$$
$$u, \theta \in C^2(D \times T) \wedge C^1(\bar{D} \times T)$$

$$\text{II)} \quad \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i$$
$$-\Delta\theta = \frac{Q}{\chi} - \frac{\dot{\theta}}{\chi} - \eta \dot{u}_{k,k}$$

$$\text{III)} \quad \sigma_{ij} = \delta_{ij}(\lambda u_{k,k} - \gamma\theta) + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$$

donde:

$$X_i : D \times T \to R$$
$$u_i : \bar{D} \times T \to R$$
$$\sigma_{ij} : \bar{D} \times T \to R$$
$$\theta : \bar{D} \times T \to R$$

θ es llamada "temperatura" del medio, u vector de movimientos y σ tensor de tensiones.

Las relaciones II, son respectivamente, la ecuación de equilibrio y la ley de conducción termoelásticas, mientras que III es la ley de Duhamel-Neuman (LANDAU & LIFSHITZ, 1969).

Definiciones obviamente derivables de la Def. 2 serían las correspondientes a los estados elastostáticos, elastodinámico, termoelástico, térmico transitorio y térmico permanente. Otra definición de interés en problemas sismológicos es la que - corresponde al estado termoelástico oscilante según lo siguiente

Def. 3.- Un estado termoelástico oscilante del medio $D(\rho, \lambda, \mu, \gamma, \eta, \chi)$ sometido a las fuerzas por unidad de volumen X y a los focos térmicos Q es la triada $[u, \sigma, \theta]$ que cumple

$$\text{I)} \quad \sigma \in C^1(D)$$
$$u, \theta \in C^2(D) \wedge C^1(\bar{D})$$

$$\text{II)} \quad \sigma_{ij,j} + X_i + \rho\omega^2 u_i = 0$$

$$-\nabla^2\theta = \frac{Q}{\chi} - i\frac{\omega}{\chi}\theta - i\omega\eta\, u_{k,k}$$

$$\text{III)} \quad \sigma_{ij} = \delta_{ij}(\lambda u_{k,k} - \gamma\theta) + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$$

donde

$$X_i,\ Q,\ u_i,\ \sigma_{ij},\ \theta : \bar{D} \to Z$$

y w es un número arbitrario llamado frencuencia de la oscilación.

De la definición 3 pueden asimismo deducirse los estados térmico oscilante y elástico oscilante en forma inmediata.

Operadores elásticos

La combinación de las condiciones III y II permite obtener las ecuaciones de campo del problema. En el caso de la Def. 2 ello conduce a

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda+\mu)\,\text{grad div}\, u - \gamma\,\text{grad}\,\theta + \text{sobre}\ w^2 + X = \rho\ddot{u} \tag{16}$$

mientras que en el caso de Def. 3 ello conduce a

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda+\mu)\,\text{grad div}\, u - \gamma\,\text{grad}\,\theta + \rho w^2 u + X = 0 \tag{17}$$

Ambos casos son generalizaciones de las llamadas ecuaciones de Navier para el caso elastostático

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda+\mu)\, \text{grad div}\, u\, X = 0 \tag{18}$$

que permite introducir el operador diferencial

$$A \equiv A_{ij} = \delta_{ij}\, \mu \nabla^2 + (\lambda+\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

y escribir (18) como

$$A u + X = 0 \tag{19}$$

o bien $\quad A u + X = \rho \ddot{u} \quad (20)$
en el caso elastodinámico.

Análogamente podría ponerse

$$A_w u + X = 0\ (\rho \ddot{u}) \tag{21}$$

con $\quad A_w \equiv A^w_{ij} = A_{ij} + \delta_{ij}\, w^2 \quad (22)$

Operadores de campo mas generales pueden definirse en forma análoga y, en particular, para el caso de la Def. 3 se escribiría

$$B_w \equiv B^w_{ij} \tag{23}$$

donde

$$\begin{aligned} B^w_{kj} &= A^w_{kj} \quad \text{si } k,j = 1,2,3, \\ B^w_{k4} &= -\gamma \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{si } k = 1,2,3, \\ B^w_{4j} &= i\, w \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{si } j = 1,2,3 \\ B^w_{44} &= \nabla^2 + \frac{i\,\omega}{\chi} \end{aligned} \tag{24}$$

con lo que $\quad BU + H = 0 \quad (25)$

donde $\quad U_i = u_i \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ i = 1.2.3 \ldots H_i = X_i$

$\qquad U_4 = \theta \qquad\qquad H_4 = \frac{Q}{\chi}$

(26)

Los operadores de tensión se pueden obtener a partir de la Ley de Cauchy

$$\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ij}\, \nu_j \tag{27}$$

mediante la condición

$$\overset{\nu}{T}_i = \nu_i\, \lambda u_{k,k}\, \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})\, \nu_i =$$

$$= \lambda\, u_{k,k}\, \nu_i + 2\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \mu (u_{i,j} - u_{j,i})\, \nu_i \tag{28}$$

con lo que

$$T \equiv \overset{\nu}{T}_{ij} = \lambda \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu\, \nu_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial \nu} \tag{29}$$

y T T u

En el caso termoelástico $\quad \overset{\nu}{T} = P\ U \quad (30)$

y donde

$$\begin{aligned} P_{ij} &= T_{ij} & ij &= 1,2,3 \\ P_{i4} &= -\gamma \nu_i & i &= 1,2,3 \\ U_i &= u_i & i &= 1,2,3 \\ U_4 &= \theta \end{aligned} \tag{31}$$

APENDICE II. SOLUCIONES FUNDAMENTALES

<u>Ecuación de Laplace en R^3</u>

$$\nabla^2 u = 0$$

solución fundamental

$$E(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \qquad r = x^2 + y^2 + z^2$$

Teorema de reciprocidad (fórumla de Green)

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) \quad \text{si} \quad v(x) = E(y-x)$$

Fórmula de representaciión

$$u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{/x-y/}\, d\gamma(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{/x-y/}\, d\gamma(x)$$

<u>Ecuación de Stokes en R^2</u>

incog.

$$(u_1\ u_2\ p)$$

$$-\nu \nabla^2 u_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} p = 0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

$$-\nu \nabla^2 u_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} p = 0$$

Solución funamental (matriz de LADYZHENSKAYA)

$$E_{ij}(x) = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{4\pi\nu}\left[\lg /x/ + \frac{x_2^2}{/x/^2}\right] & -\frac{1}{4\pi\nu} \frac{x_1 x_2}{/x/^2} & -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \lg /x/ \\ \hline -\frac{1}{4\pi\nu} \frac{x_1 x_2}{/x/^2} & \frac{1}{4\pi\pi}\left[\lg /x/ + \frac{x_1^2}{/x/^2}\right] & -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \lg /x/ \\ \hline -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \lg /x/ & -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \lg /x/ & \nu\, d \end{array}\right]$$

Teorema de reciprocidad

$$\int_D \left[\left(-\nu \nabla^2 u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1}\right) v_i - \left(-\nu \nabla^2 v_i + \frac{\partial q}{\partial x_i}\right) u_i \right] dw -$$

$$- \int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} q - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} p\right) - \nu \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} u_i - \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) v_i =$$

$$= -2\nu \int_{\partial D} [\epsilon_{ij}(u)\, v_i - \epsilon_{ij}(v)\, u_i]\, n_j\, d\gamma + \int_{\partial D} (p\, v_i n_i - q\, u_i n_i)\, d\gamma$$

$$i,j = 1,2 \quad ; \quad \epsilon_{ij}\ \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + 2\nu \epsilon_{ij}(u)$$

Fórmula de representación

$$u_k(y) = \int_{\partial D} \sigma_{ij}(u)\, n_j(x)\, E_{ik}(x-y) - \int_{\partial D} u_i(x)\, \sigma_{ij}(E_h(x-y))\, n_j$$

$$k = 1,2$$

$$p(y) = 2\nu \int_{\partial D} [\epsilon_{ij}(u)\, n_j(x)]\, E_{i3}(x-y) - 2\nu \int_{\partial D} \epsilon_{ij}\ E_3(x-y)\ n_j(x)\ u_i(x) -$$

$$- \int_{\partial D} p(x)\, E_{i3}(x-y)\, n_i(x)$$

<u>Ecuaciones de Helmholtz</u>

$$\nabla^2 u = k^2 u = 0 \qquad k > 0$$

Condiciones $/u(y)/ \leq \frac{c}{/y/}$

$/\text{grad}\, u(y)/ \leq \frac{c}{/y/^2}$

$/\frac{\partial u}{\partial n} - i k u / \leq \frac{c}{/y/^2}$ Derivada respecto a la normal en el esfera de rado /y/.

solución fundamental

$$E(x) = \frac{1}{4\pi /x/} e^{ik/x/}$$

Fórmula de representación

$$u(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\, E(x-y)\, d\gamma(x) - \int_{\partial D} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} [E(y-x)]\, d\gamma(x)$$

Elasticidad estática (ver apartado 2) en E_3

$$A u + X = 0$$

Solución fundamental (matriz de KELVIN)

$$\Gamma_{kj}(x) = \lambda' \delta_{kj} \frac{1}{/x/} + \mu' \frac{x_k x_j}{/x/^3}$$

$$\lambda' = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \qquad \mu' = \frac{\lambda + \mu}{4\lambda\mu(\lambda + 2\mu)}$$

Fórmula de representación: Fórmula de SOMIGLIANA.

Oscilaciones Armónicas (ver apartado 2) En E_3

$$A^{\omega} u = 0$$

Solución fundamental (matriz de KUPRADZE)

$$\Gamma^{\omega}_{kj} = \sum_{l=1}^{2} \left(\delta_{kj} \alpha_l + \beta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\right) \frac{e^{ik_l /x/}}{/x/}$$

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} \qquad \alpha_l = \frac{\delta_{2l}}{2\pi\rho\omega^2}$$

$$k_2^2 = \frac{\rho}{\mu}\omega^2 \qquad \beta_l = \frac{(-1)^l}{2\pi\rho\omega^2}$$

Termoelasticidad oscilatoria en E_3 (ver aptdo.2)

$$B^{\omega} u = 0$$

Solución fundamental (matriz de NOWACKI)

$$\Phi_{kj}(x,\omega) = \sum_{l=1}^{3} \Big((1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4}) \left(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3l} - \alpha_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\right) +$$

$$+ \beta_l \left\{ i\omega\eta\, \delta_{k4}(1-\delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma\delta_{j4}(1-\delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} +$$

$$+ \delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_l \Big) \frac{e^{i\lambda_l /x/}}{/x/}$$

Fórmula de representación: fórmula de SOMIGLIANA Y DUHAMEL

Termoelasticidad en E_3 (ver apartado 2)

$$\Phi_{kj}(x) = (1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\, \Gamma_{kj}(x) +$$

$$+ \frac{\gamma\delta_{j4}(1-\delta_{k4})}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{x_k}{/x/} + \frac{\delta_{k4}\delta_{j4}}{2\pi} \frac{1}{/x/}$$

$$\alpha_l = \frac{(-1)^l (1 - i\omega\chi^{-1}\lambda_l^{-2})(\delta_{1l} + \delta_{2l})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_2^2)} - \frac{\delta_{3l}}{2\pi\rho\omega^2} \qquad \sum_{l=1}^{3} \alpha_l = 0$$

$$\beta_l = \frac{(-1)^l (\delta_{1l} + \delta_{2l})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \qquad \sum_{l=1}^{3} \beta_l = 0$$

$$\gamma_l = \frac{(-1)^l (\lambda_l^2 - k_1^2)(\delta_{1l} + \delta_{2l})}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \qquad \sum_{l=1}^{3} \gamma_l = 1$$

SUMMARY

Boundary integral equation method (B.I.E.M.) is a powerful alternative to the domain methods, as the well know Finite Element Method (F.E.M.) The esential idea, are the combination of the classical reciprocity relations with the discretization phylosophy of F.E.M.

The reduction in dimension of the domain to be discretized, the easy treatment of infinite domains and the high accuracy of the results are the main adventages of B.I.E.M. Between the drawacks the nonsymetry and non sparseness of the matrices to be treated are worth remembering.

Application to several real problems has shown that in certain cases B.I.E.M. is better than F.E.M. and this is specially true when tridimensional problems of complicated geometries have to be treated.

Active research is in progress of its extensión to nonlinear and time dependent problems.